

Πέμπτο Quiz Απειροστικός Λογισμός 3

Διάρκεια 45 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τότε είναι συνεχής σε αυτό.
- (ii) Αν υπάρχει η παράγωγος κατά κάθε κατεύθυνση μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο \vec{x}_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο \vec{x}_0 .
- (iii) Αν υπάρχει η παράγωγος κατά κάθε κατεύθυνση μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο \vec{x}_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο \vec{x}_0 .
- (iv) Αν $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές μερικώς διαφορίσιμη, τότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (v) Αν $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{r}\| = 1$, και f είναι παραγωγίσιμη κατά την κατεύθυνση \vec{r} σε ένα $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$D_{\vec{r}}f(\vec{x}_0) = -D_{-\vec{r}}f(\vec{x}_0).$$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της f στο $(0, 0)$.
- (ii) Αν $\vec{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ είναι τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε ότι η υπάρχει η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση του \vec{r} στο $(0, 0)$. Για ποια $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ ισχύει η ισότητα $D_{\vec{r}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{r}$.
- (iii) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!